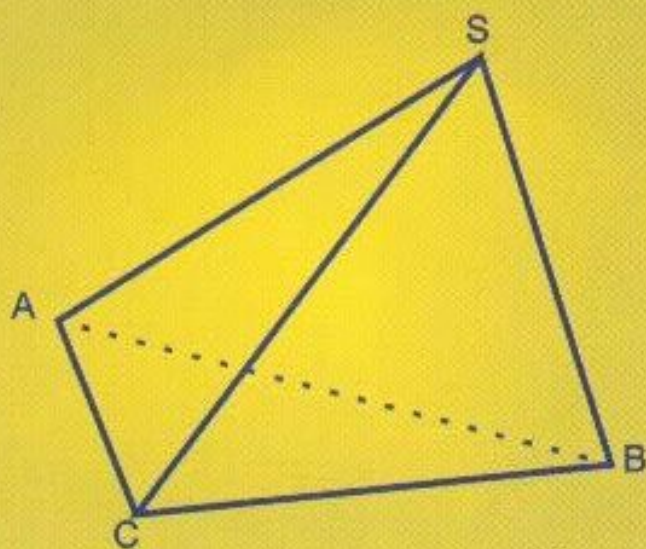


NGUYỄN VŨ THANH-TRẦN MINH CHIẾN

# GIẢI BÀI TẬP

# HÌNH HỌC



# 11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

*Giải bài tập*  
**HÌNH HỌC 11**



**NHÀ XUẤT BẢN**  
**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

Đơn vị liên kết :  
Công ty sách hoa hồng

## *Lời nói đầu*

Quyển sách **GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11** này được biên soạn theo chương trình Hình học 11 hiện hành, được trình bày như sau:

- Tóm tắt kiến thức.
- Phương pháp giải bài tập.
- Bài tập làm thêm.

Nhằm giúp các em không có điều kiện ôn tập theo nhóm có tài liệu tham khảo ôn tập, rèn luyện hoặc để so sánh với kết quả tự ôn tập ở nhà của mình.

Quý thầy cô và quý phụ huynh xem đây như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi xin chân thành đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

**NHÓM BIÊN SOẠN**

# Chương I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

## §1. PHÉP BIẾN HÌNH §2. PHÉP TỊNH TIẾN

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa phép biến hình

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm  $M$  của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất  $M'$  của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

#### 2. Định nghĩa phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng cho vectơ  $\vec{v}$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overline{MM'} = \vec{v}$  được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{v}.$$

#### 3. Các tính chất

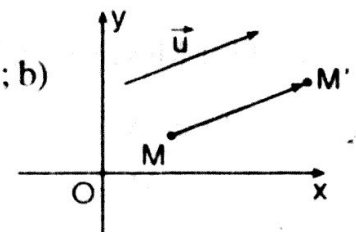
a. *Tính chất 1:* Nếu  $T_{\vec{v}}(M) = M'$ ,  $T_{\vec{v}}(N) = N'$  thì  $\overline{M'N'} = \overline{MN}$  và từ đó suy ra  $M'N' = MN$ .

b. *Tính chất 2:* Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

#### 4. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép tịnh tiến theo  $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử  $T_{\vec{u}} M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ . Ta có: 
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

#### 1. Chứng minh rằng: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$ .

*Giải*

Ta có:  $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overline{M'M} = -\vec{v} \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$

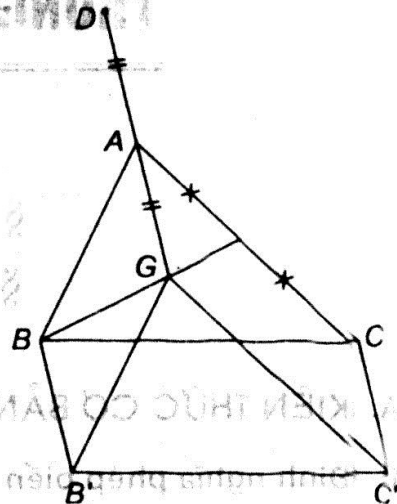
2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$ . Xác định điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$  biến D thành A.

*Giải*

Dựng các hình bình hành  $ABB'G$  và  $ACC'G$ . Khi đó ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AG}$  là tam giác  $GB'C'$ .

Dựng điểm D sao cho A là trung điểm của GD. Khi đó

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AG}. \text{ Do đó } T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A.$$



3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ  $\vec{v} = (-1; 2)$ , hai điểm  $A(3; 5)$ ,  $B(-1; 1)$  và đường thẳng d có phương trình  $x - 2y + 3 = 0$ .

- Tìm tọa độ của các điểm  $A', B'$  theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .
- Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .
- Tìm phương trình của đường thẳng  $d'$  là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

*Giải*

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$  là 
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

a) Tọa độ  $A'$  là ảnh của A qua  $T_{\vec{v}}$  là 
$$\begin{cases} x_{A'} = x_A - 1 = 2 \\ y_{A'} = y_A + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7)$$

Tương tự  $T_{\vec{v}}(B) = B'(-2; 3)$

b)  $A = T_{\vec{v}}(C) \Rightarrow C = T_{-\vec{v}}(A) = (4; 3)$ .

c) Gọi  $M(x; y)$  thuộc d,  $M' = T_{\vec{v}}(M) = (x'; y')$ .

Khi đó  $x' = x - 1, y' = y + 2$  hay  $x = x' + 1, y = y' - 2$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x' + 1) - 2(y' - 2) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0 \Leftrightarrow M' \in d' \text{ có phương trình } x - 2y + 8 = 0.$$

Vậy  $d'$  có phương trình  $x - 2y + 8 = 0$ .

4. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến a thành b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế?

### Giải

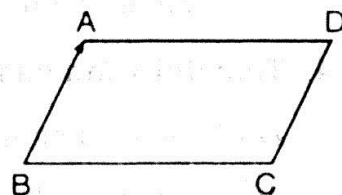
Lấy hai điểm A và B bất kì theo thứ tự thuộc a và b. Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$  sẽ biến a thành b. Vậy có vô số phép tịnh tiến biến a thành b.

## C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích đỉnh D.

### Hướng dẫn

ABCD là hình bình hành nên:  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ . Phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{BA}}$  biến C thay đổi trên đường tròn (O) thì quỹ tích đỉnh D là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến  $T_{\overrightarrow{BA}}$ .



2. Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ .

### Hướng dẫn

M cần tìm là giao điểm (nếu có) của (O') với đường tròn (O<sub>1</sub>) ảnh của (O) qua phép tịnh tiến  $\overrightarrow{AB}$ .

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (c) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Tìm ảnh của (c) qua phép tịnh tiến vectơ  $\vec{v} = (-2; 3)$ .

ĐS:  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .

## §3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

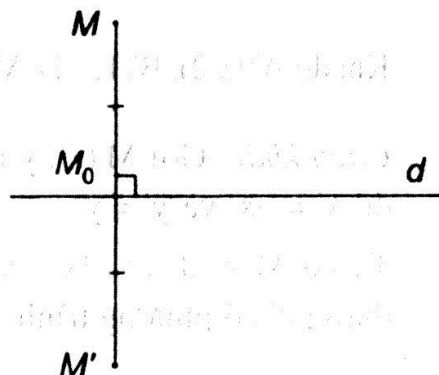
### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d.

Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng trục hoặc đơn giản là trục đối xứng.

Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là  $D_d$ .



## 2. Biểu thức tọa độ

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox là 
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

## 3. Các tính chất

*Tính chất 1:* Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

*Tính chất 2:* Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

## 4. Tâm đối xứng của một hình

*Định nghĩa:* Đường thẳng  $d$  được gọi là trục đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  nếu phép đối xứng qua  $d$  biến  $\mathcal{H}$  thành chính nó.

Khi đó ta nói  $\mathcal{H}$  là hình có trục đối xứng.

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm  $A(1; -2)$  và  $B(3; 1)$ . Tìm ảnh của  $A, B$  và đường thẳng  $AB$  qua phép đối xứng trục Ox.

*Giải*

Gọi  $A', B'$  lần lượt là ảnh của  $A, B$  qua phép đối xứng trục Ox ta có:  $A'(1; 2)$ ,  $B'(3; -1)$ .

Phương trình đường thẳng  $A'B'$  là:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0.$$

Đường thẳng  $A'B'$  là ảnh của đường thẳng  $AB$  qua phép đối xứng trục Ox.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $3x - y + 2 = 0$ . Viết phương trình của đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép đối xứng trục Oy.

*Giải*

Lấy hai điểm  $A(0; 2)$  và  $B(-1; -1)$  thuộc  $d$ . Gọi  $A' = D_{(Oy)}(A)$ ,  $B' = D_{(Oy)}(B)$ .

Khi đó  $A'(0; 2)$ ,  $B'(1; -1)$ . Vậy  $d'$  có phương trình  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3}$ , hay  $3x + y - 2 = 0$ .

*Cách khác.* Gọi  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M(x; y)$  qua phép đối xứng trục Oy. Khi đó  $x' = -x$  và  $y' = y$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow M'$  thuộc đường thẳng  $d'$  có phương trình  $3x + y - 2 = 0$ .

3. Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng?

V I E T N A M  
W  
O

*Trả lời:* Các chữ cái V, I, E, T, A, M, W, O là những hình có trục đối xứng.

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ):  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

Viết phương trình ảnh của ( $\mathcal{C}$ ) qua phép đối xứng có trục Ox.

Đáp số:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

2. Tam giác MND gọi là nội tiếp trong tam giác ABC nếu ba đỉnh của MND nằm trên ba cạnh của tam giác ABC. Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.

*Hướng dẫn:* D là chân đường cao  $\Delta ABC$ ; M, N lần lượt là giao điểm của  $D_1D_2$  với AB và BC (với  $D_1, D_2$  là các điểm đối xứng của D qua AB và BC).

3. Cho tam giác ABC với trực tâm H.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.

b) Gọi  $O_1, O_2, O_3$  là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm  $O_1, O_2, O_3$  bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

*Hướng dẫn:* Các đường tròn ngoại tiếp  $\Delta HAB, \Delta HBC, \Delta HCA$  có bán kính bằng với đường tròn ngoại tiếp (O) của  $\Delta ABC$  do điểm đối xứng của H qua các cạnh  $\Delta ABC$  nằm trên (O).



## §4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho điểm  $I$ . Phép biến hình biến điểm  $I$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $I$  thành  $M'$  sao cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MM'$  được gọi là phép đối xứng tâm  $I$ .

#### 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Cho  $M(x; y)$ ,  $M' = D_O(M) = (x'; y')$ , khi đó 
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

#### 3. Tính chất

*Tính chất 1:* Nếu  $D_I(M) = M'$  và  $D_I(N) = N'$  thì  $\overline{M'N'} = -\overline{MN}$ , từ đó suy ra  $M'N' = MN$ .

*Tính chất 2:* Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

#### 4. Tâm đối xứng của một hình

*Định nghĩa:* Điểm  $I$  được gọi là tâm đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  nếu phép đối xứng tâm  $I$  biến  $\mathcal{H}$  thành chính nó.

Khi đó ta nói  $\mathcal{H}$  là hình có tâm đối xứng.

### B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm  $A(-1; 3)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $x - 2y + 3 = 0$ . Tìm ảnh của  $A$  và  $d$  qua phép đối xứng tâm  $O$ .

*Giải*

Ảnh của  $A$  qua phép đối xứng tâm  $O$  là  $A'(1; -3)$ .

Gọi  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M(x; y)$  qua phép đối xứng tâm  $O$ .

Khi đó  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ .

Ta có  $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow -x' + 2y' + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0$

$\Leftrightarrow M'$  thuộc đường thẳng  $d'$  có phương trình  $x - 2y - 3 = 0$ .

2. Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng?

*Trả lời:* Hình bình hành và lục giác đều là những hình có tâm đối xứng.

3. Tìm một hình có vô số tâm đối xứng.

*Trả lời:* Đường thẳng và hình gồm hai đường thẳng song song là những hình có vô số tâm đối xứng.

### C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho góc xAy và O là một điểm trong góc đó. Hãy dựng qua O đường thẳng cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự tại M, N sao cho O là trung điểm của MN.

*Hướng dẫn:* Dựng điểm A' đối xứng với A qua O. Khi đó tứ giác AMA'N là hình bình hành.

2. Dựng hình bình hành biết trung điểm ba cạnh của nó là M, N, P.

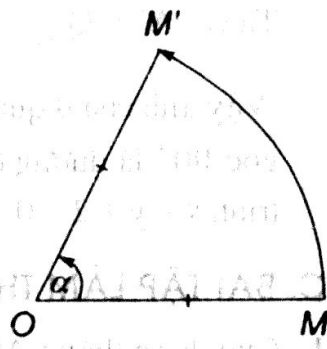
*Hướng dẫn:* Dựng N' là điểm đối xứng của N qua trung điểm của MP.

## §5. PHÉP QUAY

### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác  $\alpha$ . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho  $OM' = OM$  và góc lượng giác  $(OM; OM')$  bằng  $\alpha$  được gọi là phép quay tâm O góc  $\alpha$ .



Điểm O được gọi là tâm quay còn  $\alpha$  được gọi là góc quay của phép quay đó.

Phép quay tâm O góc  $\alpha$  thường được kí hiệu là  $Q_{(O;\alpha)}$ .

#### 2. Tính chất

*Tính chất 1:* Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

*Tính chất 2:* Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.